# Gruppe A

## Scheinklausur, 1. Teil, 14.12.2001

## Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

**Name:** ______________________ **Matrikelnummer:** ______________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt $-1$ Punkt, keine Angabe zählt $0$ Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens $0$ Punkte.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Für beliebige Mengen $A$, $B$ und $C$ gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt, dass $A \cup B = A$ und $A \cap B = \emptyset$ ist, dann ist $B = \emptyset$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Wenn für drei Mengen $A$, $B$ und $C$ gilt, dass $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 2 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Die Abbildung $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}, x \mapsto 4 - x$ ist bijektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Die Abbildung $g : \{1,2,3\} \to \text{Pot}(\{1,2,3\}), x \mapsto \{x\}$ ist surjektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Die Abbildung $h : \{2,3,5\} \times \{5,7,11\} \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto x \cdot y$ ist injektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 3 | Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -x^2 + y^2$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | $f$ ist surjektiv. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jede Faser von $f$ hat unendlich viele Elemente. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 4 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 5 | Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $U$ und $W$ Untervektorräume von $V$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Wenn $U \cap W \neq U$ ist, dann ist $W \neq U + W$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von $V$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Falls $W \subseteq U$ ist, so ist $W$ ein Untervektorraum von $U$. | ☐ Ja ☐ Nein |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist $M$ eine endliche Menge, dann hat jede Partition von $M$ höchstens so viele Teile wie $M$ Elemente hat. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei denen $1$ und $2$ im selben Teil liegen, ist $8$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen den nicht-leeren Mengen $M$ und $N$, dann bilden die Fasern von $f$ eine Partition von $M$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 7 | In dieser Aufgabe sei $K$ ein Körper. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Ist $A \in K^{n\times m}$, dann ist $A^t \cdot A \in K^{m\times m}$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $A \in K^{1\times 16}$ und $B \in K^{17\times 1}$, dann hat die Matrix $A^t \cdot B^t$ genau $16$ Zeilen und genau $17$ Spalten. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Sind $A$ und $B$ invertierbare Matrizen aus $K^{12\times 12}$, dann ist $A^t - B^t$ auch eine invertierbare Matrix. | ☐ Ja ☐ Nein |
| 8 | In dieser Aufgabe sei $K$ ein Körper und $\varphi : V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung zwischen den endlich-erzeugten $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | |
| | Für eine beliebige Menge $M \subseteq V$ gilt $\varphi(\langle M\rangle) = \langle\varphi(M)\rangle$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $B \subseteq W$ eine Basis von $W$ und ist $\varphi$ surjektiv, dann ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Basis von $V$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $(v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von $V$, dann hat $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau $3$ Elemente und ist eine Basis von $V$. | ☐ Ja ☐ Nein |
| | Ist $\varphi$ injektiv, dann gilt $\dim_K(V) < \dim_K(W)$. | ☐ Ja ☐ Nein |

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

**9** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*(4 Punkte)*

**10** Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einträge der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Vergessen Sie nicht, Ihr Ergebnis zu beweisen. *(3 Punkte)*

**11** Seien $V$ und $W$ Vektorräume über einem Körper $K$ und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$.
Beweisen Sie, dass $(v_1, v_2)$ linear unabhängig ist. *(5 Punkte)*

**12** Es sei

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{Q}^{2\times 2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{2\times 2} \\ & A & \longmapsto & A + A^t \end{array}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\varphi$ ist eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. *(2 Punkte)*

(ii) $\operatorname{Kern} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \,\middle|\, a = d = 0 \quad \text{und} \quad b = -c \right\}$. *(2 Punkte)*

(iii) $\operatorname{Bild} \varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A = A^t\}$. *(2 Punkte)*

**13** Es seien $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. Wir setzen $L := \langle E, A \rangle$. Zeigen Sie:

(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2$. *(1 Punkte)*

(ii) $L$ mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Ring. *(2 Punkte)*

(iii) $L$ mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Körper. *(2 Punkte)*

(iv) Es sei $M := \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Die Abbildung $\varphi : L \to M, a \cdot E + b \cdot A \mapsto a + b\sqrt{3}$ (für alle $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein bijektiver Ringhomomorphismus. *(2 Punkte)*

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ein Ring ist.

# Gruppe B

## Scheinklausur, 1. Teil, 14.12.2001

## Lineare Algebra I, WS 2001, Prof. Dr. G. Hiß

**Name:** ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
**Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben:** Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt $-1$ Punkt, keine Angabe zählt $0$ Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens $0$ Punkte.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösungsmenge. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| 2 | Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x^2 + y^2$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | $f$ ist surjektiv. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Jede Faser von $f$ hat unendlich viele Elemente. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| 3 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Die Abbildung $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, x \mapsto 4 - x$ ist bijektiv. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Die Abbildung $g : \{1, 2, 3\} \to \mathrm{Pot}(\{1, 2, 3\}), x \mapsto \{x\}$ ist surjektiv. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Die Abbildung $h : \{2, 3, 5\} \times \{5, 7, 11\} \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist injektiv. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| 4 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Für beliebige Mengen $A$, $B$ und $C$ gilt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Wenn für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt, dass $A \cup B = A$ und $A \cap B = \emptyset$ ist, dann ist $B = \emptyset$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Wenn für drei Mengen $A$, $B$ und $C$ gilt, dass $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cap B \neq \emptyset$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| 5 | In dieser Aufgabe sei $K$ ein Körper und $\varphi : V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung zwischen den endlich-erzeugten $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Für eine beliebige Menge $M \subseteq V$ gilt $\varphi(\langle M \rangle) = \langle \varphi(M) \rangle$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Ist $B \subseteq W$ eine Basis von $W$ und ist $\varphi$ surjektiv, dann ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Basis von $V$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Ist $(v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von $V$, dann hat $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau $3$ Elemente und ist eine Basis von $V$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Ist $\varphi$ injektiv, dann gilt $\dim_K(V) < \dim_K(W)$. | ☐ Ja | ☐ Nein |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | In dieser Aufgabe sei $K$ ein Körper. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist $A \in K^{n\times m}$, dann ist $A^t \cdot A \in K^{m\times m}$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Ist $A \in K^{1\times 16}$ und $B \in K^{17\times 1}$, dann hat die Matrix $A^t \cdot B^t$ genau $16$ Zeilen und genau $17$ Spalten. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Sind $A$ und $B$ invertierbare Matrizen aus $K^{12\times 12}$, dann ist $A^t - B^t$ auch eine invertierbare Matrix. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| 7 | Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Ist $M$ eine endliche Menge, dann hat jede Partition von $M$ höchstens so viele Teile wie $M$ Elemente hat. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Die Anzahl der Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, bei denen $1$ und $2$ im selben Teil liegen, ist $8$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Ist $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung zwischen den nicht-leeren Mengen $M$ und $N$, dann bilden die Fasern von $f$ eine Partition von $M$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| 8 | Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $U$ und $W$ Untervektorräume von $V$. Sind die folgenden Aussagen richtig? | | |
| | Wenn $U \cap W \neq U$ ist, dann ist $W \neq U + W$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von $V$. | ☐ Ja | ☐ Nein |
| | Falls $W \subseteq U$ ist, so ist $W$ ein Untervektorraum von $U$. | ☐ Ja | ☐ Nein |

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

**9** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*(4 Punkte)*

**10** Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einträge der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ Faktoren}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Vergessen Sie nicht, Ihr Ergebnis zu beweisen. *(3 Punkte)*

**11** Seien $V$ und $W$ Vektorräume über einem Körper $K$ und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$.
Beweisen Sie, dass $(v_1, v_2)$ linear unabhängig ist. *(5 Punkte)*

**12** Es sei

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{Q}^{2\times 2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{2\times 2} \\ & & A & \longmapsto & A + A^t \end{array}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\varphi$ ist eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. *(2 Punkte)*

(ii) $\text{Kern}\ \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \middle| \, a = d = 0 \quad \text{und} \quad b = -c \right\}.$ *(2 Punkte)*

(iii) $\text{Bild}\ \varphi = \{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A = A^t\}.$ *(2 Punkte)*

**13** Es seien $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. Wir setzen $L := \langle E, A \rangle$. Zeigen Sie:

(i) $\dim_{\mathbb{Q}} L = 2.$ *(1 Punkte)*

(ii) $L$ mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Ring. *(2 Punkte)*

(iii) $L$ mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein Körper. *(2 Punkte)*

(iv) Es sei $M := \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Die Abbildung $\varphi : L \to M, a \cdot E + b \cdot A \mapsto a + b\sqrt{3}$ (für alle $a, b \in \mathbb{Q}$) ist ein bijektiver Ringhomomorphismus. *(2 Punkte)*

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ein Ring ist.