Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 27.03.2001

DIPLOMVORPRÜFUNG

Mathematik II (Diskrete Strukturen)

Aufgabe 12: (9 Punkte)

Es sei p eine Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ und $m = \sum_{i=0}^{p-2} a^i$. Für welche a mit $1 \le a \le p$ ist p ein Teiler von m ?

Aufgabe 13: (8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Liegt jede Ecke eines Turniers T_n der Ordnung n auf einem orientierten Kreis der Länge $> \frac{n}{2}$, dann hat T_n einen orientierten Hamiltonkreis.

b) Liegt jede Ecke eines Turniers T_n der Ordnung n auf einem orientierten Kreis der Länge $\ge \sqrt{2n}$, dann ist T_n stark zusammenhängend.

Aufgabe 14: (8 Punkte)

Es sei G ein schlichter, Eulerscher Graph und $\mu(G)$ sein Index.

a) Zeigen Sie, dass es eine Menge $K' \subseteq K(G)$ von $\frac{\Delta(G)}{2}$ verschiedenen Kanten gibt, so dass $G \setminus K' = (E(G), K(G) \setminus K')$ zusammenhängend ist.

b) Ist es möglich, dass $\mu(G) < \frac{\Delta(G)}{2}$ gilt? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Bestimmen Sie alle schlichten, Eulerschen Graphen G mit $\mu(G) = 1$.

Aufgabe 15: (8 Punkte)

Es seien k und n zwei natürliche Zahlen mit $k \le n$. Eine *k-Zahlpartition der Zahl n ohne Wiederholung* ist eine Darstellung von n als Summe von k paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Wird die Anordnung der Summanden nicht berücksichtigt, so bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen k-Zahlpartitionen von n ohne Wiederholung mit $w(n, k)$.

a) Bestimmen Sie $w(n, 2)$ für $n \ge 2$.

b) Bestimmen Sie *(ohne Beweis)* für festes gegebenes $k \in \mathbb{N}$ alle $n \ge k$ mit $w(n, k) = 1$.

c) Es sei $n = 2t^2 + 2t - 2$ mit $t \in \mathbb{N}$. Für welche t gilt $w(n, 2t) \ge 2$?
(Begründung mit b) oder direkt.)

Aufgabe 16: (8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_1 = 2$ und $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für alle $n \ge 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe 17: (9 Punkte)

a) Wieviele ungeordnete 3-Zahlpartitionen $p(100, 3)$ gibt es?

b) Wieviele verschiedene natürliche Zahlen $n \ge 1\,000\,000$ gibt es, die die gleichen Ziffern wie die Zahl $6\,111\,670$ besitzen?

c) Es sei μ die Möbiussche μ-Funktion. Berechnen Sie $\sum_{d/1092} 2(1 + \mu(d))$.