G. Nebe, M. Künzer 20.03.2007

Diskrete Strukturen, SS 06

Vordiplomsnachklausur

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4 und ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

Es sind insgesamt 36 Punkte erreichbar.

Ist ein **Kasten** bei der Frage, so bitte die Antwort in den Kasten. Die für diese Antwort benötigten Rechnungen gehen diesenfalls in die Bewertung nicht ein. Eine falsche Antwort gibt 0 Punkte (aber keine negativen Punkte).

Bitte zu jeder Bearbeitung einer Frage **ohne Kasten** deutlich die Aufgabennummer angeben. Bei diesen Fragen ist ein nachvollziehbarer Lösungsweg Bestandteil einer vollständigen Lösung.

Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1 **(1+2+2+2 Punkte)**

(1) Auf wieviele Arten kann man 3 Kugeln aus 5 Kugeln ziehen, wenn man jeweils nicht wieder zurücklegt und auf die Reihenfolge achtet?

(2) Bestimme die Ordnung des Elements $\big((1,2,3,4)\circ(2,3,5)\big)^4$ von $\mathcal{S}_5$.

(3) Bestimme $\big|\{\sigma\in\mathcal{S}_6 \,:\, \sigma(i)\neq i \text{ für alle } i\in\{1,2,\ldots,6\}\}\big|$.

(4) Bestimme die Anzahl der irreduziblen Polynome von Grad 12 in $\mathbf{F}_2[X]$.

Aufgabe 2 **(2+2+1 Punkte)**

Sei $G := \langle a := (1,2,3),\ b := (2,3,4)\rangle \leq \mathcal{S}_4$.

(1) Bestimme die Bahnenlänge $|G\cdot 1|$.

(2) Bestimme die Bahnenlänge $|\,\mathrm{Stab}_G(1)\cdot 2|$.

(3) Bestimme $|G|$.

Aufgabe 3 **(2+2 Punkte)**

(1) Bestimme $f\geq 1$ minimal so, daß $\mathbf{F}_{7^f}$ eine primitive 20-te Einheitswurzel besitzt.

(2) Bestimme die Menge aller Elemente von $\mathbf{F}_9^*$, welche $\mathbf{F}_9^*$ erzeugen. In anderen Worten, bestimme $\{x\in\mathbf{F}_9^* \,:\, \langle x\rangle = \mathbf{F}_9^*\}$. $\{ \quad \}$

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Betrachte folgenden Graphen.

Bestimme darin die Anzahl der Kantenzüge von der Ecke 2 zur Ecke 2 von Länge 4.

Aufgabe 5 **(1+1+1+1 Punkte)**

(1) Bestimme ein $z \in \mathbf{Z}$ mit $z \equiv_5 1$, $z \equiv_7 0$, $z \equiv_8 0$.

(2) Bestimme ein $z \in \mathbf{Z}$ mit $z \equiv_5 0$, $z \equiv_7 1$, $z \equiv_8 0$.

(3) Bestimme ein $z \in \mathbf{Z}$ mit $z \equiv_5 0$, $z \equiv_7 0$, $z \equiv_8 1$.

(4) Bestimme das $z \in \mathbf{Z}$ mit $0 \leq z < 5 \cdot 7 \cdot 8$ und mit

$$\begin{aligned} z &\equiv_5 2 \\ z &\equiv_7 1 \\ z &\equiv_8 4 . \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **(2+2 Punkte)**

Sei C der lineare Code über $\mathbf{F}_4$ mit der Erzeugermatrix $\begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 1 & \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega & 1 & 0 & \omega \end{pmatrix}$.

(1) Bestimme eine Prüfmatrix für C.

(2) Bestimme den Minimalabstand von C.

Aufgabe 7 **(2+1+2+2+1 Punkte)**

Sei $f(X) = X^2 + \omega X + 1 \in \mathbf{F}_4[X]$. Sei C der zyklische Code der Länge 5 mit Erzeugerpolynom $f(X)$.

(1) Bestimme alle Nullstellen von $f(X)$ in $\mathbf{F}_{16}$.
(Hinweis: Identifiziere $\omega = \gamma^5$. Es gibt zwei Nullstellen.)

(2) Bestimme den designierten Minimalabstand von C bezüglich der primitiven 5-ten Einheitswurzel γ^3.

(3) Bestimme eine Prüfmatrix von C und den Minimalabstand $d(C)$.

(4) Vergleiche die Dimension von C mit der Hammingschranke im vorliegenden Fall, d.h. für Länge und Minimalabstand wie C.

(5) Ist C ein Hammingcode? Begründe!

Aufgabe 8 **(2 Punkte)**

Zeige oder widerlege folgende Aussage.

Das Polynom $f(X) := X^9 + X^7 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$ zerfällt in ein Produkt paarweise verschiedener irreduzibler Faktoren.