G. Nebe, M. Künzer 21.08.2006

Diskrete Strukturen, SS 06

Lösung zur Scheinklausur

Aufgabe 1

(1) Wir haben $\binom{4+4-1}{4-1} = 35$ Möglichkeiten.

(2) Wir erhalten $\big((1,3,2)\circ(1,4,3)\circ(1,3)\big)^2 = (1,3,4,2)^2 = (1,4)(2,3)$, und dieses Element hat Ordnung 2.

(3) Wir müssen die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in $\mathcal{S}_5$ bestimmen. Diese ergibt sich zu

$$5! \cdot \sum_{i=0}^{5} \frac{(-1)^i}{i!} \;=\; 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \;=\; 44\,.$$

(4) Da $91 = 7 \cdot 13$ in eine gerade Zahl paarweise verschiedener Primfaktoren zerfällt, ist $\mu(91) = 1$.

Aufgabe 2

Wir kürzen $u(X) := X$, $v(X) := X^2+X+1$ und $w(X) := X^3+X+1$ ab. Zwischenergebnisse sind

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & u(X)\cdot(X^4+X^3) & +\; v(X)w(X)\cdot 1 \\ 1 & = & v(X)\cdot(X^3+X^2+X+1) & +\; u(X)w(X)\cdot X \\ 1 & = & w(X)\cdot(X+1) & +\; u(X)v(X)\cdot X \end{array}$$

Somit erfüllt

$$\tilde{f}(X) \;:=\; 1\cdot v(X)w(X)\cdot 1 + 1\cdot u(X)w(X)\cdot X + X^2\cdot u(X)v(X)\cdot X \;=\; X^6+X^5+X^3+X^2+1$$

die verlangten Kongruenzen. Polynomdivision durch $u(X)v(X)w(X)$ liefert dann die Lösung

$$f(X) \;=\; X^3+X^2+X+1\,,$$

die die Gradbedingung erfüllt.

Aufgabe 3

(1) Es ist ${}^{b}a = (1,6,5,4,3,2) = a^{-1} = a^5$. Also ist jedes Element von G von der Form $a^i b^j$ mit $0 \le i \le 5$ und $0 \le j \le 1$.

Somit wird

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^0b,\ a^1b,\ a^2b,\ a^3b,\ a^4b,\ a^5b\} \\ & = & \{\mathrm{id},\ (1,2,3,4,5,6),\ (1,3,5)(2,4,6),\ (1,4)(2,5)(3,6),\ (1,5,3)(2,6,4),\ (1,6,5,4,3,2)\,, \\ & & \ (2,6)(3,5),\ (1,2)(3,6)(4,5),\ (1,3)(4,6),\ (1,4)(2,3)(5,6),\ (1,5)(2,4),\ (1,6)(2,5)(3,4)\}\,. \end{array}$$

Man kann auch einen Baum erstellen. Der Aufwand dafür ist etwas größer.

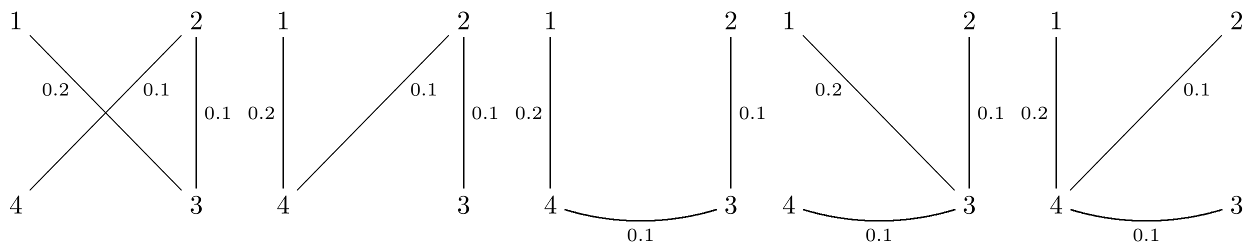
(2) Nach dem Lemma von Burnside ergibt sich die Anzahl der Bahnen von G auf A_m zu

$$\frac{1}{12}\left(\underbrace{1\cdot m^6}_{\text{zu id}} + \underbrace{2\cdot m^1}_{\text{zu }(1,2,3,4,5,6)\text{ etc.}} + \underbrace{2\cdot m^2}_{\text{zu }(1,3,5)(2,4,6)\text{ etc.}} + \underbrace{4\cdot m^3}_{\text{zu }(1,4)(2,5)(3,6)\text{ etc.}} + \underbrace{3\cdot m^4}_{\text{zu }(2,6)(3,5)\text{ etc.}}\right).$$

Insbesondere ergibt sich die gefragte Anzahl der Bahnen von G auf A_3 zu 92.

Aufgabe 4

Minimale aufspannende Teilgraphen sind die folgenden.



Verlangt war, einen von diesen anzugeben.

Aufgabe 5

(1) Eine Erzeugermatrix von $(C|C')$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

(2) Der Minimalabstand ist gegeben durch $d\big((C|C')\big) = \min\{2d(C),\, d(C')\}$. Wir erkennen direkt, daß $d(C) = 1$ und $d(C') = 2$. Also ist $d\big((C|C')\big) = \min\{2, 2\} = 2$.

Den Minimalabstand aus einer Prüfmatrix für $(C|C')$ abzulesen, ist möglich, aber aufwendiger.

Aufgabe 6

(1) Es sind mit γ^9 und γ^{13} auch $(\gamma^9)^4 = \gamma^{36} = \gamma^6$ und $(\gamma^{13})^4 = \gamma^{52} = \gamma^7$ Nullstellen von $f(X)$. Wegen $\deg f = 4$ ist die Menge der Nullstellen von $f(X)$ in $\mathbf{F}_{16}$ damit zu $\{\gamma^6,\, \gamma^7,\, \gamma^9,\, \gamma^{13}\}$ bekannt.

(2) Es ist γ eine primitive 15-Einheitswurzel (da $\gamma^3 \neq 1$ und $\gamma^5 = \gamma^2 + \gamma \neq 1$), und deren 2 aufeinanderfolgende Potenzen γ^6, γ^7 sind Nullstellen von $f(X)$. Also beträgt der designierte Minimalabstand $2 + 1 = 3$.

Aufgabe 7

(1) Die Prüfmatrix ist nur bis auf eine Permutation der Zeilen bestimmt. Wir können geschickterweise folgende nehmen.

$$\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1\\ 1&\beta^0\\ 1&\beta^1\\ 1&\beta^2\\ 1&\beta^3\\ 1&\beta^4\\ 1&\beta^5\\ 1&\beta^6 \end{pmatrix}$$

Denn dann liefern die Erzeugnisse der Zeilen gerade alle eindimensionalen Teilräume von $\mathbf{F}_8^{1\times 2}$. Dazugehörend erhalten wir die Prüfmatrix

$$\begin{pmatrix} 1&\beta^0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&\beta^1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&\beta^2&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&\beta^3&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&\beta^4&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&\beta^5&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&\beta^6&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

(2) Die Länge von C beträgt $N = 9$, der Minimalabstand $d = 3$ (wie bei allen Hammingcodes). Die Singleton-Schranke besagt nun, daß die Dimension von C nicht über $N - d + 1 = 7$ liegen sollte. Nun ist die Dimension von C gerade $k = 7$, d.h. die Singleton-Schranke wird angenommen.

Aufgabe 8

Die Aussage ist falsch. Z.B. ist 2^3 ein Teiler von $|\mathcal{S}_4|$, ohne daß $\mathcal{S}_4$ ein Element der Ordnung 2^3 enthält. In der Tat müßte es hierzu ein Element in $\mathcal{S}_4$ geben, welches in Zykeldarstellung einen Zykel der Länge 8 aufweist, was wegen $8 > 4$ nicht möglich ist.