Gruppe A

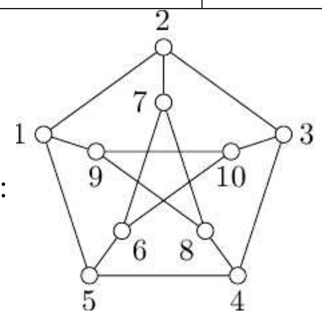
Klausur vom 22.2.2008 zur Vorlesung

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2007/08

Name:
Matrikelnummer:

Punkte:	**Note:**

Für die folgenden Aufgaben gibt es bei richtiger Antwort 1 Punkt und sonst 0 Punkte.		
1		
	Für beliebige Mengen A, B und C gilt $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn für Mengen A, B und C gilt, dass $A \cap B \subseteq C$ ist, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wieviele Elemente hat die Potenzmenge der Menge $\{1, 2, \{3, 4\}\}$?	________
2		
	Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von der Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 8\}$ in die Menge $\{0,1\}$?	________
	Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist f surjektiv.	◯ Ja / ◯ Nein
	$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y)$ ist eine injektive Abbildung.	◯ Ja / ◯ Nein
3		
	Wieviele reflexive Relationen gibt es auf einer dreielementigen Menge?	________
	Welche der folgenden Eigenschaften charakterisieren Relationen R auf einer Menge M, die *Äquivalenzrelationen* sind? (Geben Sie die Buchstaben an.) (A) relativ, (B) symmetrisch, (C) antisymmetrisch, (D) transitiv, (E) destruktiv, (F) reflexiv, (G) ist Halbordnung.	________
	Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es auf der Menge $\{1, 2, 3\}$?	________
4		
	Wieviele Bitfolgen der Länge 8 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit mindestens zweimal hintereinander vorkommt?	________
	Gegeben ist ein Vorrat von Kugeln in 10 Farben, von jeder Farbe gibt es 12 Stück. Aus diesem Vorrat werden 3 Kugeln ausgewählt. Wieviele Farbkombinationen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es für die 3 Kugeln?	________
	Auf wieviele Arten lassen sich die Buchstaben des Wortes PIZZA umsortieren?	________
5	Sei σ die folgende Permutation aus der symmetrischen Gruppe S_{12}: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	
	Was ist das Signum von σ?	________
	Geben Sie σ in Zykelschreibweise an.	________
	Worauf wird 8 durch $\sigma \circ \sigma \circ \sigma$ abgebildet?	________

6	Was ist $3! \cdot \binom{27}{13} / \binom{27}{14}$? (Bitte als ganze Zahl ausrechnen.)	______________
	Was ist $\binom{4}{0} + 2 \cdot \binom{4}{1} + 4 \cdot \binom{4}{2} + 8 \cdot \binom{4}{3} + 16 \cdot \binom{4}{4}$? (Bitte als ganze Zahl ausrechnen.)	______________
	Gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < n$?	◯ Ja / ◯ Nein
7	Sei der folgende Graph mit Knoten $V = \{1, \ldots, 10\}$ gegeben: 	
	Wie lang ist der kürzeste Weg vom Knoten 5 zum Knoten 2?	______________
	Was ist die Summe der Grade aller Knoten?	______________
	Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $V' = \{1, 3, 4, 6, 9, 10\}$ induzierte Teilgraph?	______________
8		
	Bestimmen Sie $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a \leq 16$, so dass in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ gilt $\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{a}$.	______________
	Bestimmen Sie den Wert $\varphi(51)$ der Eulerschen φ-Funktion.	______________
	Seien $a = 156$ und $b = 299$. Geben Sie (x, y) an, so dass $xa + yb = \text{ggT}(a, b)$ ist.	______________
Die folgenden Aufgaben sind schriftlich auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. (Namen auf dem Blatt nicht vergessen!) Für vollständige Lösungen gibt es jeweils 4 Punkte.		
9	Sei G eine Gruppe mit Untergruppen U_1 und U_2. Beweisen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.	
10	Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$	