2. Klausur zur Vorlesung Diskrete Strukturen, WS 2011/2012

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 28.3.2012

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Dauer: 120 min. **Gesamtpunktzahl:** 50 **Mindestpunktzahl zum Bestehen:** 25

Aufgabe 1. Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 8 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\pi = \sigma \circ \tau$.

(a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

(b) Berechnen Sie das Signum von π. (1 P.)

(c) Sei k_0 das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $\pi^k = \mathrm{id}$. Berechnen Sie k_0. (2 P.)

(d) Schreiben Sie die Permutation x mit $\sigma \circ x \circ \tau = (1,5)(3,8)(4,7,6)$ als Produkt von disjunkten Zykeln. (2 P.)

$\pi =$ ☐ sgn(π)= ☐ $k_0 =$ ☐ $x =$ ☐

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(407, 341)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $d = \lambda \cdot 407 + \mu \cdot 341$. (3 P.)

(b) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl a mit $a \equiv 3 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 13^3 \pmod 8$. (2 P.)

(c) Berechnen Sie die kleinste natürliche Zahl x für die gilt $x \cdot 3 \equiv 1 \pmod{77}$. (2 P.)

$d =$ ☐ $\lambda =$ ☐ $\mu =$ ☐ $a =$ ☐ $x =$ ☐

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{Q}$ seien $A \in \mathbb{Q}^{3\times 2}$ und $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+2 \\ 1 & a+1 \\ -2 & -2a+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4a+2 & -3 & 3a^2-6a \\ 2a+2 & -2 & 2a^2-4a \\ 2a-4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie für $a = 0$ ein $X \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$ mit $AX = B$. (3 P.)

(b) Wieviele Lösungen hat die Matrixgleichung $AX = B$ für $a = 0$? (2 P.)

(c) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist $AX = B$ mit $X \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$ lösbar? (3 P.)

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Die Lösungen sind vollständig auszurechnen und als ganze Zahlen einzutragen.

(a) Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer fünfelementigen Menge? (3 P.)

(b) Sei M eine Menge mit 11 Elementen. Wieviele 3-elementige Teilmengen hat M? (3 P.)

(c) 4 gleiche Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele Augenkombinationen gibt es, in denen keine Zahl genau zweimal vorkommt? (3 P.)

(d) 3 Studenten sollen 6 Aufgaben vorrechnen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Aufgaben auf die Studenten zu verteilen, wenn kein Student ohne Aufgabe bleiben soll? (3 P.)

(a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$ (d) $\boxed{}$

Aufgabe 5. Wir betrachten den gewichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \underline{8}$ und den Kanten E aus der folgenden Tabelle:

Kante	$\{4,8\}$	$\{3,4\}$	$\{5,6\}$	$\{3,8\}$	$\{4,6\}$	$\{1,8\}$	$\{4,7\}$	$\{5,8\}$	$\{1,4\}$	$\{4,5\}$	$\{2,6\}$	$\{2,4\}$	$\{1,6\}$
Gewicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

(a) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf auf der Teilmenge $\{1, 3, 5, 7\} \subset V$ induzierte Teilgraph von G? (2 P.)

(b) Besitzt der Graph G einen Eulerzug, eine Eulertour oder beides oder keines davon? (2 P.)

(c) Was ist der maximale Grad eines Knotens in G? (1 P.)

(d) Ein *minimaler Kantenzug* zwischen zwei Knoten von G ist ein Kantenzug zwischen diesen Knoten, so dass die Summe der Gewichte der Kanten minimal ist.
Bestimmen Sie die minimalen Kantenzüge in G vom Knoten 7 zu jedem anderen Knoten. Als Lösung geben Sie die Gewichte aller vorkommenden Kanten in aufsteigender Reihenfolge an. (2 P.)

(e) Wieviele Brücken besitzt der Graph G? (2 P.)

(a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$ (d) $\boxed{}$ (e) $\boxed{}$

Bearbeiten Sie die folgenden beiden Aufgaben **schriftlich und mit ausführlichen Begründungen** auf einem gesonderten Blatt.

Aufgabe 6. Für eine quadratische Matrix A und $n \in \mathbb{N}$ sei A^n das n-fache Produkt von A mit sich selbst (z.B. $A^3 = AAA$, usw.).

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$. Finden Sie eine Formel für die Einträge der Matrizen A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und beweisen Sie diese Formel mit Induktion über n. (3 P.)

Aufgabe 7. Beweisen Sie, dass jeder Graph mit mehr als einem Knoten mindestens zwei Knoten enthält, die den gleichen Grad haben. (3 P.)

Viel Erfolg!