Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 08/09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (6 Punkte)

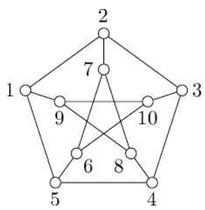
Ordnen Sie jedem graphentheoretischen Problem aus der Tabelle einen geeigneten Algorithmus zu. Folgende Antworten stehen zur Auswahl: (a) Kruskal, (b) Tiefensuche, (c) Euklid, (d) Fleury (Schneeräumen), (e) Breitensuche, (f) keiner der genannten. Tragen Sie bitte nur Buchstaben a–f in die leere Spalte ein.

Spannbaum (ungewichtet)	
Distanzen	
Eulertour	

minimaler Spannbaum	
Hamiltonkreis	
Zusammenhangskomponenten	

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Der Peterson-Graph besitzt weder einen Hamiltonkreis noch eine Eulertour. Ist es möglich eine einzelne Kante so hinzuzufügen, dass a) ein Hamiltonkreis und b) eine Eulertour entsteht? Wenn ja, dann tragen Sie die beiden Endknoten einer solchen Kante ein; wenn nein, dann tragen Sie '—' ein.



Hamiltonkreis: ☐ Eulertour: ☐

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele injektive Abbildungen gibt es von $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_6$, die $\bar{0}$ auf $\bar{0}$ abbilden? (3 P.)

b) Wieviele Farbzusammenstellungen sind beim Kartenspiel in einer Hand von fünf Karten möglich? Mit Farben sind die vier Spielfarben gemeint. (3 P.)

c) In zehn Produkten sind vier fehlerhaft. Wieviele Stichproben, bestehend aus vier Produkten, enthalten weniger als zwei fehlerhafte Produkte? (3 P.)

d) Ein Student hat sechs Flaschen Bier von paarweise verschiedenen Sorten, die er an drei aufeinanderfolgenden Abenden trinken möchte. Wieviele Möglichkeiten hat er, die Sorten auf die Abende zu verteilen, wenn an jedem Abend mindestens eine Flasche geöffnet werden soll? (3 P.)

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐

♡

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(4,6,7) \circ \sigma \circ (3,5,6) = \pi$ gilt. (3 P.)
Probehinweis: Die Lösung σ ist ein 3-Zykel.

$\pi = \boxed{}$ $\quad \mathrm{sgn}(\pi) = \boxed{}$ $\quad \sigma = \boxed{}$

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Bestimmen Sie:

a) Berechnen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ so, dass $\lambda \cdot 192 + \mu \cdot 156 = \mathrm{ggT}(192, 156)$ gilt. (2 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{192}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{156} = \overline{108}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{69}$ das multiplikative Inverse von $c := \overline{31}$. (3 P.)

$\lambda = \boxed{}$ $\quad \mu = \boxed{}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad c^{-1} = \boxed{}$

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Es seien zwei Abbildungen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ gegeben, deren Komposition surjektiv ist. Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein?

a) g ist surjektiv ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

b) g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

c) f ist surjektiv ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

Aufgabe 7. (8 Punkte)

Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten und, mit ausführlicher Begründung, auf einem gesonderten Blatt abzugeben.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, gilt: (3 P.)

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c. \tag{1}$$

b) Geben Sie $n \in \mathbb{N}$ sowie $a, b \in \mathbb{Z}_n, a \neq 0$, so an, dass (1) nicht gilt. (2 P.)

c) Es seien $a, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Zeigen Sie für alle $b \in \mathbb{Z}$ gilt: $a|(b \cdot c) \Rightarrow a|b$. (3 P.)
Hinweis: Schreiben Sie die Aussagen als Kongruenzen um.

Viel Erfolg!