Klausur zu “Diskrete Strukturen”, WS 08/09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (4 Punkte)

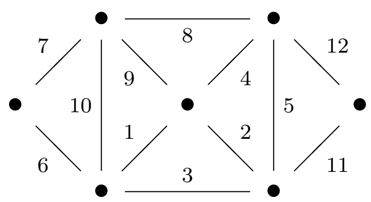
Geben Sie zwei verschiedene Definitionen des Begriffs „Baum“ an:

1.

2.

Aufgabe 2. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum des folgenden gewichteten Graphen. In die sechs Lösungsfelder sind die Längen der Kanten des Spannbaumes in aufsteigender Reihenfolge einzutragen. (4 P.)



b) Ist Kruskal’s Algorithmus ein Greedy-Algorithmus? ☐ Ja ☐ Nein (1 P.)

c) Besitzt der Graph eine Eulertour? ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele Äquivalenzrelationen, deren Äquivalenzklassen alle gleichmächtig sind, gibt es einer vierelementigen Menge? (3 P.)

b) Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben B, B, B, L, L, A, A bilden? (3 P.)

c) Wieviele 6-stellige Telefonummern gibt es, die nicht mit einer Null beginnen und in denen keine Ziffer zweimal direkt hintereinander vorkommt? (3 P.)

d) Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele Augenkombinationen gibt es, in denen weder 1 noch 2 vorkommt? (3 P.)

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐

— bitte wenden —

$\heartsuit$

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie σ als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von σ. (2 P.)

c) Geben Sie τ so an, dass $(1\,7\,6\,3\,8) \circ (4\,2\,5) \circ \tau = \sigma$ gilt. (2 P.)
Probehinweis: Die Lösung τ ist eine Transposition.

d) Geben Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$ an, für das $\sigma^k = \mathrm{id}$ gilt. (2 P.)

$\sigma = \boxed{}$ $\mathrm{sgn}(\sigma) = \boxed{}$ $\tau = \boxed{}$ $k = \boxed{}$

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Seien $n = 246$ und $a = 276$.

a) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(a, n)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = \lambda a + \mu n$. (4 P.)

b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_n$ eine Lösung von $\bar{a} \cdot x = \overline{30}$. (2 P.)

c) Wieviele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}_n$? (2 P.)

$\mathrm{ggT}(a, n) = \boxed{}$ $\lambda = \boxed{}$ $\mu = \boxed{}$ $x = \boxed{}$ $|\mathbb{Z}_n^*| = \boxed{}$

Aufgabe 6. (9 Punkte)

Wir bezeichnen mit $s_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl erster Art, also die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge mit k Zykeln.

a) Geben Sie eine geschlossene Formel für $s_{n,1}$ an, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist. (3 P.)

$\boxed{}$

b) Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen. (3 P.)

c) Leiten Sie eine geschlossene Formel für $s_{n,n-1}$ her. Dies kann wahlweise mit Verwendung der Rekursionsgleichung geschehen (Induktionsbeweis) oder ohne (kombinatorischer Beweis). (3 P.)

$\boxed{}$

Viel Erfolg!