1. Teil der Nachholklausur zur Algebra I
(WS 91/92)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 115 Minuten. In beiden Teilen der Klausur müssen zusammen mindestens 40 Punkte, in jeder Klausur jeweils mindestens 1 Punkt erzielt werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Seien p, q verschiedene Primzahlen und G eine nicht–zyklische Gruppe der Ordnung pq. Zeigen Sie, daß die Anzahl der Elemente der Ordnung q in G ein Vielfaches von p ist. 6 Pkte.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Anzahl der Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 3 in der Gruppe $G = SL_2(3)$. 7 Pkte.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:
(a) Ist G eine Gruppe mit $|G| = 96$, so hat G einen Normalteiler vom Index 2 oder 3.
(b) Jede Gruppe der Ordnung 40 besitzt einen nicht–trivialen Normalteiler. 7 Pkte.

Aufgabe 4.
Sei $\beta = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$, und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $G := \langle A, B \rangle \leq GL_2(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: G ist nicht abelsch und $|G| = 12$.
(b) Bestimmen Sie je eine 2– und eine 3–Sylowgruppe von G, und die Anzahl aller 2– und aller 3–Sylowgruppen in G. 8 Pkte.

Aufgabe 5.
Sei G eine endliche Gruppe, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $N := N_G(P)$. Zeigen Sie: $N_G(N) = N_G(P)$. 6 Pkte.

Aufgabe 6.
Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen der Diedergruppe D_{14} der Ordnung 14. 6 Pkte.

Aufgabe 7.
Zeigen Sie: Im Ring $\mathbb{Z}_n$ (für $n \in \mathbb{N}$) ist jedes Element $\neq 0$ entweder ein Nullteiler oder invertierbar. 6 Pkte.