Klausur zur „Algebra I“ (WS 93/94)

Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden.
Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei K eine Halskette mit fünf Perlen.

1. Bestimmen Sie die Gruppe G der Drehungen und Spiegelungen der Ebene, welche K invariant lassen, als Untergruppe von S_5. *3 Punkte*
2. Bestimmen Sie die Ordnung von G. *2 Punkte*
3. Wieviele verschieden Färbungen (bis auf Äquivalenz) der Halsketten mit fünf Perlen gibt es, falls Sie blaue, grüne und rote Perlen zur Verfügung haben. *6 Punkte*

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie, welche der folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ sind. Begründen Sie Ihr Antwort!

1. $x^5 - 30x^3 + 8x + 1994,$ *2 Punkte*
2. $x^3 + 4x^2 - x - 1994.$ *4 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}) =: L.$

1. Bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{Q}$-Vektorraums L. *3 Punkte*
2. Die Abbildung $\alpha^* : L \to L, x \mapsto x \cdot \alpha$ ist bekanntlich linear (nicht mehr zu zeigen). Bestimmen Sie ${}_B\alpha^*{}_B$. *3 Punkte*
3. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. *6 Punkte*

Aufgabe 4.

1. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 95. *3 Punkte*
2. Es sei p eine Primzahl. Ist G eine nicht kommutative Gruppe der Ordnung p^3, so hat das Zentrum von G die Ordnung p.
   Hinweis: Sie dürfen den aus der Vorlesung/Übung bekannten Satz benutzen, daß jede Gruppe der Ordnung p^k, $k > 0$, ein nicht-triviales Zentrum hat, benutzen. *5 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei $f = x^3 + 5x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Zeigen Sie, f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$. *3 Punkte*
2. Da f irreduzibel ist, muß $L = \mathbb{Q}[x]/(f)$ ein Körper sein (nicht zu zeigen). Bestimmen Sie ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad kleiner 3 mit $(f) + g = ((f) + 2x - 2)^{-1}$. *7 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $f = x^4 - 49 \in \mathbb{Q}[x]$ und $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f.

1. Bestimmen Sie die Menge M der Nullstellen von f über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. *2 Punkte*
2. Bestimmen Sie $G = \mathrm{Gal}(\mathrm{L}, \mathbb{Q})$ als Untergruppe von S_M. *6 Punkte*
3. Bestimmen Sie alle Untergruppen U von G sowie für jedes U den zugehörigen Fixkörper. *6 Punkte*

Aufgabe 7.
Man gebe eine vollständige Definition der folgenden Begriffe:

1. Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[x]$. *3 Punkte*
2. Externes semidirektes Produkt zweier Gruppen. *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $R = \mathbb{Q}[x]$ und I das von $(x^2 + 1) * (x^2 + x + 1)$ erzeugte Ideal. Untersuchen Sie, ob es in R/I Nullteiler und nicht-triviale Ideale gibt. Falls ja, geben Sie ein Paar von Nullteilern bzw. ein nicht-triviales Ideal an, falls nein, beweisen Sie dies. *6 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen (p Primzahl), $\mathbb{F}_p^*$ die multiplikative Gruppe und $\mathbb{F}_p^+$ die additive Gruppe von $\mathbb{F}_p$.

1. Für $p = 7$ bestimme man die Ordnung der Gruppe $G = \{f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p, x \mapsto x * a + b \mid a \in \mathbb{F}_p{}^*, b \in \mathbb{F}_p{}^+\}$ (mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Multiplikation). *3 Punkte*
2. Man bestimme alle Sylow-7-Untergruppen von G. *3 Punkte*
3. Man bestimme eine Sylow-2-Untergruppe und Sylow-3-Untergruppe von G. *4 Punkte*
4. Man bestimme die <u>Anzahl</u> der Sylow-3-Untergruppen von G. *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $n = rqp$ für Primzahlen r, q und p. Es sei $G = \langle a, b \rangle$ eine Gruppe der Ordnung $2n$ und es sei n die Ordnung von a.

1. Ist G auflösbar? *2 Punkte*
2. Bestimmen Sie eine Kompositionsreihe $K_1 > ... > K_m$ für G, indem Sie Erzeugendensysteme für K_i angeben. *4 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler, K und H Untergruppen mit $KN = HN = G$ und $K \cap N = H \cap N = \{1\}$. Zeigen Sie, das K isomorph zu H ist. *6 Punkte*