G. Nebe, M. Künzer 17.12.2004

Algebra I, WS 04/05

Klausur I

Dauer: 120 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

In der Klausur sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1 **(4+2+4+2 Punkte)**

Sei $a := (1,2)(4,5)$, sei $b := (2,3)(4,5)$, und sei $G := \langle a, b\rangle \leq \mathcal{S}_5$.

(1) Bestimme eine base und zugehörige strong generators von G.

(2) Ist $(1,3) \in G$?

(3) Gib eine Präsentation von G an unter Verwendung der Erzeuger a und b.

(4) Zeige, daß es einen Automorphismus von G gibt, der a und b vertauscht.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Es operiere $\mathcal{S}_4$ auf der Menge

$$A := \{f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3\} \mid f \text{ beliebige Abbildung}\}$$

vermöge $(\sigma \cdot f)(i) := f(\sigma^{-1}(i))$ für $1 \leq i \leq 4$. Bestimme die Anzahl der Bahnen. (Potenzen nicht auswerten.)

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $G := \langle g, h \mid hgh^3,\ h^3g^3\rangle$. Bestimme G/G' als direktes Produkt zyklischer Gruppen.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung 168.

(1) Wieviele Elemente der Ordnung 7 gibt es in G ?

(2) Zeige, daß es keine transitive G-Menge M mit $|M| = 6$ gibt.

(3) Zeige, daß $\bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_2(G)} P = 1$.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Gib einen Isomorphismus $C_2 \times C_2 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut} C_8$ an.

Aufgabe 6 **(2 Punkte)**

Konstruiere eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung 21.

Aufgabe 7 **(4 Punkte)**

Seien a, b, $c \in \mathbf{Z}$. Bestimme ein $x \in \mathbf{Z}$ mit $x \equiv_4 a$, $x \equiv_5 b$ und $x \equiv_7 c$.

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Sei G eine endliche Gruppe. Zeige oder widerlege.

(1) Für wenigstens einen Primteiler p von $|G|$ hat G eine normale p-Sylowgruppe.

(2) Sei $G \simeq N \rtimes U$ semidirekt zerlegt. Für $(n, u) \in N \rtimes U$ ist $|\langle (n, u)\rangle| = \mathrm{kgV}(|\langle n\rangle|, |\langle u\rangle|)$.

(3) Ist $|G| = 102$, so ist G auflösbar.